Normat **55**:4, 166–176 (2007)

Ickestandardanalys och historiska infinitesimaler

Erik Palmgren[1]

Matematiska institutionen
Uppsala universitet
Box 480
SE-75106 Uppsala
palmgren@math.uu.se

Oändligt små tal – infinitesimaler – var en självklar del av grunden för differentialkalkylen innan Dedekind, Weierstrass och andra runt 1870 genomförde den så kallade aritmetiseringen av analysen, dvs konstruerade reella tal i termer av följder eller mängder av rationella tal och definierade kontinuititet och gränsvärden i termer av dessa. Trots att den "naiva" infinitesimalkalkylen var rik på motsägelser har den egentligen aldrig dött ut som en intuitiv metod. År 1961 visade Abraham Robinson att en konstruktion som använts för ickestandardmodeller av Peanoaritmetiken även kunde användas för att ge en rigorös tolkning av infinitesimalkalkylen. Redan 1934 hade Thoralf Skolem konstruerat aritmetiska modeller med oändligt stora tal. Robinson tillämpade metoden på kroppen av reella tal istället för de naturliga talen och kunde på så sätt förena Weierstrassk analys med infinitesimaler. Robinson gav i sin bok *Nonstandard Analysis* (1966) exempel på att resonemang med infinitesimaler faktiskt var helt riktiga om man bara inför några lämpliga distinktioner som är möjliga inom hans teori. Vidare undersökningar i denna anda utfördes av Lakatos (1966/1978) och Cleave (1971). Mer begränsade modeller med infinitesimaler hade konstruerats långt före Robinsons modell. Detlef Laugwitz och Curt Schmieden publicerade 1958 en uppsats om den så kallade Ω-*kalkylen* som hade ett liknande syfte som ickestandardanalysen. Deras mer elementära konstruktion kan på goda grunder hävdas fånga det äldre infinitesimalbegreppet väl. Under alla omständigheter förtjänar Ω-kalkylen att vara bättre känd, vilket vi hoppas kunna bidra med i denna artikel.

Till matematikhistoriens mest omdiskuterade satser hör Cauchys sats från 1821 om seriesummans kontinuitet (Spalt 2002). Den kritiserades och modifierades av

[1] Artikelförfattaren stöds av ett forskningsbidrag från Vetenskapsrådet (VR) i Sverige. Artikeln bygger på ett seminarium som hölls för en grupp matematikhistoriker i Uppsala, februari 2003. Ett särskilt tack går till Anders Öberg och Kajsa Bråting för intressanta samtal om Cauchys och Björlings summasatser.

en rad berömda matematiker: Abel, Seidel och Stokes. Även den med Cauchy samtida svenske matematikern E.G. Björling var involverad i diskussionen; se Domar (1987) och Bråting (2007) för analyser av dennes insats och ytterligare referenser. I moderna termer tycks Cauchys sats innebära att om en följd av kontinuerliga funktioner konvergerar punktvis mot en funktion så är denna funktion kontinuerlig. Detta är naturligtvis ett felaktigt resultat (se exempel nedan). Den nu vedertagna korrigeringen av Cauchy är att lägga till kravet att konvergensen skall vara likformig. Laugwitz (1987a) menar dock att Cauchys sats är korrekt om man använder Cauchys egna definitioner, och därmed infinitesimaler. Utan att ge oss in i någon matematikhistorisk debatt skall vi här presentera en tolkning i Ω-kalkylen som ger vid handen att Cauchy sats inte bara ger ett tillräckligt villkor, och utan också ett *nödvändigt* villkor, för att en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar punktvis skall ha ett kontinuerligt gränsvärde. Detta ger alltså ett bättre resultat än den korrigerade satsen.

1 En elementär modell för infinitesimaler

De grundläggande begreppen i Ω-kalkylen (Schmieden och Laugwitz 1958, Laugwitz 1987) är betydligt enklare och mer intuitiva än de i Robinsons ickestandardanalys, och kan presenteras utan hänvisning till satser om predikatlogik eller avancerade mängdteoretiska konstruktioner, såsom kompakthetssatsen eller ultrafilter.

En vanlig informell beskrivning av infinitesimaler var historiskt sett som "kvantiteter som går mot noll". Den avgörande frågan är hur den dynamiska aspekten skall förstås, dvs vad man menar med "går mot". Med det moderna funktionsbegreppet beskriver vi dem naturligt som talföljder som konvergerar mot noll. Följderna

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots), \\ \mathbf{b} &= (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{n+3}, \dots) \end{aligned}$$

konvergerar båda mot noll, fast med olika hastighet. Följden $\mathbf{a}$ underskrider följden $\mathbf{b}$ från och med 3:e termen. För talföljder $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ definierar vi allmänt relationen $<^\star$ (*underskrider*)

$\mathbf{x} <^\star \mathbf{y}$ om, och endast om, det finns något n så att för alla $m \geq n$ gäller $x_m < y_m$

För varje godtyckligt tal c låter vi $c^\star$ beteckna den konstanta följden

$$c^\star = (c, c, c, \dots).$$

Tydligen gäller då att för varje positivt tal ε:

$$\mathbf{a} <^\star \varepsilon^\star.$$

Dessutom gäller $0^\star <^\star \mathbf{a}$, så $\mathbf{a}$ är större än noll. Detta är en äkta infinitesimal, dvs ett oändligt litet tal som ej är noll. Talföljden

$$\Omega = (1, 2, 3, \dots)$$

överskrider å andra sidan varje $N^\star$ där N är ett givet naturligt tal. Ω kan därmed kallas för ett *oändligt tal.*

Konstruktionen kan generaliseras. För varje *mängd* M av tal, eller andra matematiska objekt, införs en *ickestandard version* $M^\star$ av mängden M som är mängden bestående av alla oändliga följder $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ där varje term x_k tillhör M. (Ekvivalent: $M^\star$ är mängden av funktioner $\mathbb{N} \to M$. De naturliga talen är här $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.) Med beteckningarna ovan har vi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^\star$ och $\Omega \in \mathbb{N}^\star$.

De vanliga aritmetiska operationerna utvidgas till ickestandardtal genom att låta dem verka termvis

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, \cdots) + (y_1, y_2, y_3, \cdots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) \\
(x_1, x_2, x_3, \cdots) \cdot (y_1, y_2, y_3, \cdots) &= (x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots) \\
-(x_1, x_2, x_3, \cdots) &= (-x_1, -x_2, -x_3, \ldots) \\
|(x_1, x_2, x_3, \cdots)| &= (|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots)
\end{aligned}$$

Tydligen gäller då för exemplen ovan att

$$\mathbf{a} \cdot \Omega \cdot \Omega = 1^\star, \qquad \mathbf{b} \cdot (\Omega + 3^\star) = 1^\star,$$

så $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ kan betraktas som de inverterade talen $\frac{1}{\Omega^2}$ respektive $\frac{1}{(\Omega+3)}$. Det vore naturligt att betrakta talet $\Omega - 1$ som inverterbart, men dess representerande följd är

$$(0, 1, 2, 3, \ldots)$$

så den första termen i följden $(\Omega - 1) \cdot \mathbf{x}$ är 0 oavsett val av $\mathbf{x}$. Alltså har $\Omega - 1$ inte en invers i en strikt mening. Problemet är att termvis likhet mellan följder är ett alldeles för strängt krav. Vi definierar istället relationen $=^\star$, *slutligen lika,*

$\mathbf{x} =^\star \mathbf{y}$ om, och endast om, det finns något n så att för alla $m \geq n$ gäller $x_m = y_m$.

Antag nu att $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\star$ och $0 <^\star |\mathbf{x}|$. Då finns det alltså n så att $|x_m| > 0$ för alla $m \geq n$. Låt $y_m = x_m^{-1}$ för $m \geq n$ och $y_m = 0$ för $m < n$. Då gäller uppenbarligen att

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \cdot 0, \ldots, x_{n-1} \cdot 0, x_n x_n^{-1}, x_{n+1} x_{n+1}^{-1}, \ldots) =^\star 1^\star.$$

Man bortser alltså från de inledande nollorna i vänsterledet.

Det är lätt att se att $=^\star$ är en kongruensrelation med avseende på de aritmetiska operationerna och relationen $<^\star$. Det är nu möjligt att definiera en algebraisk struktur på ekvivalensklasserna. Man kan förstås lika gärna skriva ut $=^\star$ på samma sätt som vid moduloräkning, vilket vi skall göra här.

Notera att $u^\star =^\star v^\star$ omm $u = v$ samt att $u^\star <^\star v^\star$ omm $u < v$. För att få en lättare notation utelämnas $\star$ ofta på vanliga konstanter samt på relationerna $=^\star$ och $<^\star$.

Definitioner. Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\star$. Då

(a) $\mathbf{x}$ *infinitesimal* om $|\mathbf{x}| < \varepsilon^\star$ för alla positiva ε.

(b) $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ligger *oändligt nära*, symboliskt $\mathbf{x} \simeq \mathbf{y}$, om $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är infinitesimal.

(c) $\mathbf{x}$ är *ändlig,* om $|\mathbf{x}| < \varepsilon^\star$ för något positivt ε.

(d) $\mathbf{x}$ är *standard* om $\mathbf{x} = u^\star$ för något $u \in \mathbb{R}$.

(e) $\mathbf{x}$ är *konvergent* om det ligger oändligt nära ett standardtal.

När vi inte behöver hänvisa till den representerande följden $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ för ett ickestandardtal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\star$ skriver vi denna med vanlig kursiv stil $x \in \mathbb{R}^\star$.

Man visar lätt att om x och y är infinitesimaler, så är $x + y$ och xy det också. Om x är ändlig och y är infinitesimal, så är xy infinitesimal. Ett konvergent tal kan skrivas som en summa av ett standardtal och en infinitesimal. Vi har följande omedelbara, men viktiga relation

Lemma 1.1. *För* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\star$ *och* $a \in \mathbb{R}$ *gäller*

$$\mathbf{x} \simeq a^\star$$

om, och endast om, följden (x_n) *konvergerar mot* a. □

Ett av "felen" i äldre texter om infinitesimalräkning var enligt Robinson (1966) att det saknades en lämplig distinktion mellan $=$ och $\simeq$. Här är en korrigerad härledning av en derivata: Låt $x \in \mathbb{R}^\star$ vara standard, och låt dx vara en infinitesimal med $|dx| > 0$. Då har vi

$$\frac{(x + dx)^3 - x^3}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2 \simeq 3x^2.$$

Det senare ledet följer eftersom $3x$ är ändlig och dx är infinitesimal.

Anmärkning. Ickestandardtalen

$$\begin{aligned} J &= (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \\ U &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \end{aligned}$$

är ändliga, men inte konvergenta. Vi ser att $J \cdot U = 0$, vilket betyder att det bland icke-konvergenta tal finns nolldelare. Detta betyder förstås också att $\mathbb{R}^\star$, till skillnad från $\mathbb{R}$, ej är en talkropp. Notera dock att för *konvergenta* $x, y \in \mathbb{R}^\star$

$$xy \simeq 0 \Longrightarrow x \simeq 0 \text{ eller } y \simeq 0.$$

Vi nämnde att det är möjligt att ge godtyckliga mängder en ickestandard version. Mängden av funktioner $A \times B \to C$ har därmed en ickestandardutvidning $(A \times B \to C)^\star$. Denna består alltså av följder av funktioner från $A \times B$ till C. En sådan följd $\mathbf{f} \in (A \times B \to C)^\star$ kan nu tillämpas på följder $\mathbf{x} \in A^\star$ och $\mathbf{y} \in B^\star$, termvis, på detta sätt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f_1(x_1, y_1), f_2(x_2, y_2), f_3(x_3, y_3), \ldots, f_n(x_n, y_n), \ldots)$$

Om $\mathbf{f} = g^\star$ har vi speciellt

$$g^\star(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (g(x_1,y_1), g(x_2,y_2), g(x_3,y_3), \ldots, g(x_n,y_n), \ldots).$$

Notera att detta var precis vad vi gjorde när de aritmetiska operationerna utvidgades till ickestandardtal, t.ex. $g = + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Anmärkning. Om $\mathbf{x} \in A^\star$, så ger funktionen $f : \mathbb{N} \to A$ definierad av $f(n) = x_n$ att

$$\mathbf{x} = f^\star(\Omega).$$

Alltså är varje ickestandardobjekt bilden av Ω under en standardfunktion. Detta syns vara upphovet till benämningen Ω-*kalkyl* för Schmiedens och Laugwitz teori.

2 Kontinuitet

För funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan man införa olika kontinuitetsbegrepp med hjälp av relationen $\simeq$. Vi säger att f är *stadig* vid $x \in \mathbb{R}$ om för alla $y \in \mathbb{R}^\star$

$$x^\star \simeq y \Longrightarrow f^\star(x^\star) \simeq f^\star(y).$$

Låt oss översätta detta till vanlig, Weierstrassk analys. Antag först att f är stadig vid x. Låt $y_n \in \mathbb{R}$ vara en följd som går mot x. Sätter vi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ har vi då $x^\star \simeq \mathbf{y}$. Stadigheten ger direkt $f^\star(x^\star) \simeq f^\star(\mathbf{y})$. Uttolkar vi denna relation fås för varje $\varepsilon > 0$ något n så att

$$|f(x) - f(y_m)| < \varepsilon \qquad (m \geq n).$$

Detta säger att f är kontinuerlig i x. Det är också lätt att visa det omvända. Alltså gäller

Sats 2.1. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion och $x \in \mathbb{R}$. Då är f stadig vid x om, och endast om, f är kontinuerlig vid x.* $\square$

Detta är en så kallad *ickestandardkarakterisering* av begreppet kontinuitet i en punkt. Man kan även karakterisera likformig kontinuitet genom ett ickestandardbegrepp. En funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är *likformigt stadig* om för alla $x, y \in \mathbb{R}^\star$

$$x \simeq y \Longrightarrow g^\star(x) \simeq g^\star(y).$$

Vi överlåter beviset av följande sats till läsaren

Sats 2.2. *En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är likformigt stadig om, och endast om, den är likformigt kontinuerlig.* $\square$

Exempel. $f(x) = x^2$ är inte likformigt kontinuerlig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi har

$$(\Omega + \frac{1}{\Omega})^2 - \Omega^2 = 2 + \frac{1}{\Omega^2} \simeq 2.$$

Villkoret i sats 2.2 uppfylls därmed inte för $x = \Omega + \Omega^{-1}$ och $y = \Omega$.

2.1 Sats C

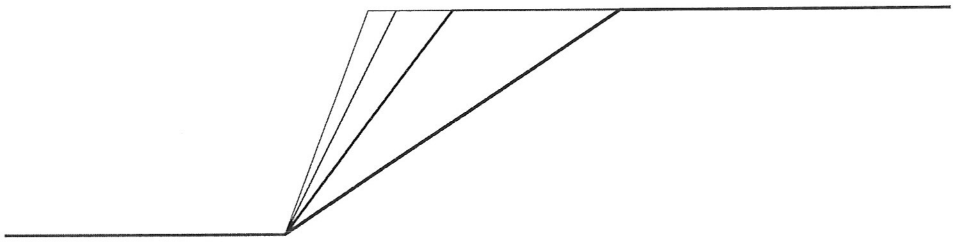
Cauchy påstås ha gett bevis för följande falska sats om kontinuitet (se Laugwitz 1987a):

(C) En punktvis konvergent följd $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ av kontinuerliga funktioner konvergerar mot en kontinuerlig funktion $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Ett motexempel till satsen fås genom att betrakta polygon-funktionerna

$$g_n(x) = \max(0, \min(1, nx))$$

som konvergerar punktvis mot stegfunktionen g, given av $g(x) = 0$ om $x \leq 0$, och $g(x) = 1$ om $x > 0$. Här är g_1, g_2, g_3, g_4 inritade i samma figur:



Laugwitz (1987a) menar att dock Cauchy gav ett riktigt bevis, men att felet ligger i själva den moderna formuleringen av satsen. Översätter vi, det som Laugwitz menar vara den rätta tolkningen av den urpsrungliga formuleringen, till Ω-kalkylen blir den riktiga satsen följande.

Sats 2.3 (C'). *Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vara en följd av kontinuerliga funktioner. Antag att för varje positiv $\varepsilon \in \mathbb{R}$ och varje* konvergent *$x \in \mathbb{R}^\star$, så finns n så att för alla naturliga tal $m \geq n$,*

$$|(f_m)^\star(x) - f^\star(x)| <^\star \varepsilon^\star.$$

Då är f kontinuerlig.

Bevis. Låt $u \in \mathbb{R}$, $x = u^\star$ och låt $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ vara infinitesimal. Det räcker enligt Sats 2.1 att visa att

$$f^\star(x + \alpha) \simeq f^\star(x),$$

för att visa att f är kontinuerlig. Tag positiv $\varepsilon \in \mathbb{R}^\star$. Både x och $x + \alpha$ är konvergenta. Välj enligt antagande m så stor att

$$|f_m^\star(x) - f^\star(x)| < (\varepsilon/3)^\star \qquad |f_m^\star(x + \alpha) - f^\star(x + \alpha)| < (\varepsilon/3)^\star.$$

För detta m är f_m kontinuerlig, så $|f_m^\star(x) - f_m^\star(x + \alpha)| < (\varepsilon/3)^\star$. Summera dessa och använd triangelolikheten

$$\begin{aligned}
|f^\star(x + \alpha) - f^\star(x)| &\leq |f^\star(x + \alpha) - f_m^\star(x + \alpha)| \\
&\quad + |f_m^\star(x + \alpha) - f_m^\star(x)| \\
&\quad + |f_m^\star(x) - f^\star(x)| \\
&< (\frac{\varepsilon}{3})^\star + (\frac{\varepsilon}{3})^\star + (\frac{\varepsilon}{3})^\star = \varepsilon^\star
\end{aligned}$$

Satsen är visad. □

Intressant nog är Cauchys villkor även nödvändigt.

Sats 2.4. *Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vara en följd av kontinuerliga funktioner. Antag att denna konvergerar punktvis mot en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Då gäller det att för varje positiv $\varepsilon \in \mathbb{R}$, och varje konvergent $x \in \mathbb{R}^\star$, finns n så att för alla $m \geq n$,*

$$|(f_m)^\star(x) - f^\star(x)| <^\star \varepsilon^\star.$$

Bevis. Låt $x \in \mathbb{R}^\star$ vara konvergent och låt $\varepsilon \in \mathbb{R}$ vara positiv. Skriv x som en summa av ett standardtal och en infinitesimal $u^\star + \alpha$. Enligt punktvis konvergens gäller nu att det finns n så att för varje $m \geq n$

$$|f_m(u) - f(u)| < \varepsilon/3.$$

Därmed även $|f^\star_m(u^\star) - f^\star(u^\star)| < (\varepsilon/3)^\star$. Men f, och alla f_m, är kontinuerliga så

$$|f^\star_m(u^\star) - f^\star_m(x)| < (\varepsilon/3)^\star \qquad |f^\star(u^\star) - f^\star(x)| < (\varepsilon/3)^\star.$$

Summerar vi och använder triangelolikheten erhåller vi för $m \geq n$ att

$$|f^\star_m(x) - f^\star(x)| < \varepsilon^\star. \quad \square$$

Betrakta nu följden g_n i exemplet ovan och dess punktvisa gränsvärde g. Vi skall se att Cauchys villkor ej är uppfyllt. Talet $\frac{1}{\Omega}$ är konvergent (men inte standard) och för $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$g^\star_n(\frac{1}{\Omega}) = \frac{n}{\Omega}$$

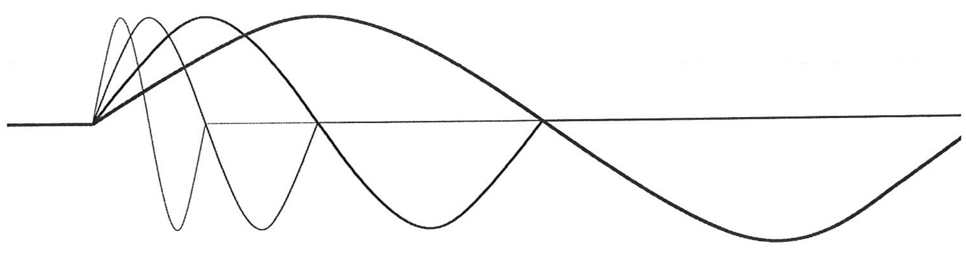
men $g^\star(\frac{1}{\Omega}) = 1$. Alltså

$$\left|g^\star_n(\frac{1}{\Omega}) - g^\star(\frac{1}{\Omega})\right| \simeq 1.$$

Cauchys villkor är ej heller det samma som likformig konvergens. Definiera $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ att vara $h_n(x) = \sin(2\pi nx)$ på intervallet $[0, 1/n]$ (en fullständig svängning) och 0 annars. Då konvergerar h_n punktvis mot funktionen som är konstant 0. Ty om $0 < t < 1$, så finns m med $\frac{1}{n} < t$ för alla $n \geq m$, och följaktligen $h_n(t) = 0 = h(t)$. Konvergensen är inte likformig, ens på intervallet $[0, 1]$, eftersom

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |h_n(t) - h(t)| = 1,$$

för alla n. Här är h_1, h_2, h_4, h_8 inritade i samma figur:



Man kan direkt se att denna följd (h_n) uppfyller Cauchys villkor. Låt $x \simeq t^\star$, $t \in \mathbb{R}$, vara ett konvergent ickestandardtal. Om $t = 0$, har vi $h_n^\star(x) \simeq h_n^\star(t) = 0 = h^\star(x)$. För $t > 0$ följer $h_n^\star(x) \simeq h_n^\star(t) = 0$ för alla tillräckligt stora n.

Med hjälp av den läsning av Cauchy som Laugwitz (1987a) gör och denna ickestandardtolkning i Ω-kalkylen kan vi se att Cauchy faktiskt kan sägas ha haft ett bättre kriterium än likformig konvergens. Kriteriet är dock inte lika lätt att uttrycka i standardtermer.

2.2 Likformig konvergens

Ett ickestandard naturligt tal $n \in \mathbb{N}^\star$ är *oändligt* om $n > k^\star$ för varje $k \in \mathbb{N}$. Följande sats ger en ickestandardkaraktерisering av likformig konvergens.

Sats 2.5. *Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vara en följd av funktioner. Skriv $f(n, x) = f_n(x)$. Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Då gäller att f_n konvergerar likformigt mot g om, och endast om, för alla $x \in \mathbb{R}^*$ och för alla oändliga $m \in \mathbb{N}^*$*

$$f^\star(m, x) \simeq g^\star(x)$$

Bevis. ($\Rightarrow$) Antag att f_n konvergerar likformigt mot g. Låt $\varepsilon > 0$. Då finns k så att för alla $\ell \geq k$ och alla $u \in \mathbb{R}$

$$|f(\ell, u) - g(u)| < \varepsilon.$$

Tag nu $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^\star$ oändlig och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\star$ godtycklig. Då finns p så att för alla $n \geq p$: $m_n \geq k$. För $n \geq p$ har vi tydligen

$$|f(m_n, x_n) - g(x_n)| < \varepsilon.$$

Därmed gäller

$$|f^\star(\mathbf{m}, \mathbf{x}) - g^\star(\mathbf{x})| < \varepsilon^\star.$$

($\Leftarrow$) Antag att f_n ej konvergerar likformigt mot g. Då finns $\varepsilon > 0$ och för varje n ett tal $m_n > n$ samt $x_n \in \mathbb{R}$ så att

$$|f(m_n, x_n) - g(x_n)| > \varepsilon.$$

Tag nu $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, \ldots)$ och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Alltså

$$|f(\mathbf{m}, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \varepsilon^\star$$

och $\mathbf{m}$ är oändlig. $\square$

Ett överraskande generellt resultat är följande sats (Laugwitz 1978) om oändliga ekvationssystem över $\mathbb{R}^\star$.

Sats 2.6 (Robinsons lemma). *Låt $h : \mathbb{N} \times A^{d+1} \to \mathbb{R}$ vara en godtycklig funktion, där A är någon mängd. Låt $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d \in A^\star$. Antag att*

$$h^\star(n^\star, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) \simeq 0$$

för varje $n \in \mathbb{N}$. *Då finns oändlig* $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^\star$ *sådan att*

$$h^\star(\mathbf{j}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) \simeq 0$$

för alla $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^\star$ *med* $\mathbf{j} \leq \mathbf{m}$.

Bevis. Det är lätt att visa att vi kan välja en strängt växande följd av naturliga tal

$$\ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \cdots$$

så att för alla $m \geq \ell_n$ och alla $s \in \{1, \ldots, n\}$

$$|h(s, x_{1,m}, \ldots, x_{d,m})| < \frac{1}{n}.$$

Definiera nu m_k att vara n om $\ell_n \leq k < \ell_{n+1}$ och 1 då $k < \ell_1$. Då är $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, \ldots)$ uppenbarligen ett oändligt naturligt tal. Antag att $\mathbf{j} \leq \mathbf{m}$. Därmed finns ett index r så att $j_k \leq m_k$ för alla $k \geq r$. Låt $n \in \mathbb{N}$ vara godtycklig och tag $k \geq \max(r, \ell_n)$. Då gäller $\ell_{n'} \leq k < \ell_{n'+1}$ för något $n' \geq n$. Vi har alltså $j_k \leq m_k = n'$, så

$$|h(j_k, x_{1,k}, \ldots, x_{d,k})| < \frac{1}{n'} \leq \frac{1}{n}.$$

Därmed

$$|h^\star(\mathbf{j}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)| < \frac{1}{n},$$

och eftersom n var ett godtyckligt naturligt tal

$$h^\star(\mathbf{j}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) \simeq 0. \qquad \square$$

Med hjälp av sats 2.5 och detta lemma kan vi erhålla ett ickestandardbevis av satsen om likformig konvergens.

Sats 2.7. *Låt* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) vara en följd av kontinuerliga funktioner. Låt* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Om* f_n *konvergerar likformigt mot* g, *så är* g *kontinuerlig.*

Bevis. Skriv $f(n, x) = f_n(x)$. Antag att $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^\star$ ligger oändligt nära $a^\star$ och $a \in \mathbb{R}$. På grund av att varje f_n ($n \in \mathbb{N}$) är kontinuerlig har vi

$$f^\star(n^\star, \mathbf{u}) - f^\star(n^\star, a^\star) \simeq 0.$$

Enligt Robinsons lemma finns oändlig $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^\star$ så att $f^\star(\mathbf{m}, \mathbf{u}) - f^\star(\mathbf{m}, a^\star) \simeq 0$. Sats 2.5 ger nu

$$g(\mathbf{u}) \simeq f^\star(\mathbf{m}, \mathbf{u}) \simeq f^\star(\mathbf{m}, a^\star) \simeq g(a^\star),$$

vilket visar att g är kontinuerlig. $\square$

3 Robinsons vs Schmieden-Laugwitz ickestandardanalys

Kan ickestandard analys användas i elementär undervisning? Ett större pedagogiskt experiment med Robinsonsk ickestandardanalys i grundläggande analyskurser genomfördes av H.J. Keisler i början av 1970-talet. Den axiomatiska stilen i den tillhörande läroboken (Keisler 1976) fick kritik från vissa håll. Erret Bishop (1977) menade i en anmälan av boken att studenterna inte får veta vad en infinitesimal egentligen är. Denna invändning drabbar inte Ω-kalkylen eftersom man, som vi sett, kan ge en omedelbar och naturlig förklaring. Se Henle (1999) för en lyckad pedagogisk framställning av denna kalkyl. När man betraktar avancerade tillämpningar av ickestandardanalysen (Albeverio mfl. 1986) verkar det klart att Robinsons kalkyl är överlägsen Ω-kalkylen. I Robinsons kalkyl utgör de ickestandard reella talen en talkropp, och har dessutom den kraftfulla så kallade *övergångsprincipen* gentemot de reella talen, vilken innebär att båda talkropparna har samma första ordningens logiska egenskaper. Ω-kalkylen har dock fördelen att den relativt enkelt kan göras konstruktivistiskt acceptabel i enlighet med Bishops konstruktiva metoder; se (Martin-Löf 1989; Palmgren 1995, 1998; Schuster 2000).

Referenser

S. Albeverio, J.-E. Fenstad, R. Hoegh-Krohn, T. Lindstrøm (1986). *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press.

E. Bishop (1977). Recension av Keisler (1976). *Bulletin of the American Mathematical Society,* vol. 83, no. 2, s. 205–208.

K. Bråting (2007). A new look at E.G. Björling and the Cauchy sum theorem. *Archive for the History of Exact Sciences,* vol. 61 (2007), s. 519–535.

J.P. Cleave (1971). Cauchy, Convergence and Continuity. *The British Journal for the Philosophy of Science* vol 22, s. 27–37.

J.W. Dauben (1998). Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, A Personal and Mathematical Odyssey, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Y. Domar (1987). E.G. Björling och seriesummans kontinuitet. *Normat* vol. 35, s. 50–56.

J.M. Henle (1999). Non-nonstandard analysis: Real infinitesimals. *Mathematical Intelligencer,* vol. 21, no 1, s. 67–73.

A.E. Hurd och P.A. Loeb (1985). *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press.

H.J. Keisler (1976). *Elementary Calculus.* Prindle, Weber and Schmidt, Boston.

I. Lakatos (1978). Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics. Chapter 3 in *Philosophical papers, Vol 2: Mathematics, Science and Epistomology.* Cambridge University Press. (Tidigare opublicerad skrift från 1966).

D. Laugwitz (1978). *Infinitesimalkalkül.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

D. Laugwitz (1987a). Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia Mathematica,* vol. 14, s. 258–274.

D. Laugwitz (1987b). *Zahlen und Kontinuum.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

D. Laugwitz (2001). Curt Schmieden's approach to infinitesimals: An eye-opener to the historiography of analysis, In: P. Schuster *et al.* (eds.) *Reuniting the Antipodes - Constructive and Nonstandard Views of the Continuum* s. 127–142, Kluwer.

P. Martin-Löf (1989). Mathematics of Infinity. I: P. Martin-Löf och G. Mints (red.), *COLOG-88 Computer Logic,* Lecture Notes in Computer Science, vol. 417, Springer.

E. Palmgren (1995) A constructive approach to nonstandard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic* vol. 73, s. 297–325.

E. Palmgren (1998). Developments in constructive nonstandard analysis. *Bulletin of Symbolic Logic,* vol. 4, s. 233–272.

A. Robinson (1966). *Non-standard Analysis.* North-Holland.

C. Schmieden och D. Laugwitz (1958). Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Mathematisches Zeitschrift.* vol. 69, s. 1–39.

P. Schuster (2000). A constructive look at generalized Cauchy reals. *Mathematical Logic Quarterly,* vol. 46, no. 1, s. 125–134.

D.D. Spalt (2002). Cauchys Kontinuum: Eine historiographisches Annäherung via Cauchys Summensatz. *Archive for the History of Exact Sciences.* vol. 56, s. 285–338.